



چکیده

در چارچوب فرمول بندی هامیلتونی به بررسی ساختار قیدی کنش فیرز- پائولی در هر دو حالت بدون جرم و جرم دار می پردازیم. این مطالعه را در هر دو فضای تخت و خمیده انجام می دهیم. زمانی که جمله جرمی در کنش حذف می شود تغییر ناگهانی در جبر قیود و شاخص های نظریه مشاهده می کنیم. در پس زمینه دوستیته، با تنظیم جرم، کاهش یک درجه آزادی و ظهور تقارن پیمانه ای جدیدی را خواهیم داشت که در خواص جبر قیود منعکس می شود و نظریه بدون جرم جزئی نامیده می شود. همچنین تابع مولد و تبدیلات پیمانه ای را نیز برای هر دو نظریه بدون جرم و بدون جرم جزئی بدست می آوریم.

مقدمه

فیرز و پائولی در سال ۱۳۹۳ [۱] لاگرانژی مشهورشان برای میدان اسپین ۲ جرم دار را ارائه دادند. با بررسی معادلات حرکت بدون جرم و جرم دار نظریه به ترتیب و $\frac{1}{2}D(D-2)$ و $\frac{1}{2}D(D-3)$ درجه آزادی بدست آوردند. حالت بدون جرم تحت تبدیلات پیمانه ناورد است. پدیده جالبی در فضای خمیده رخ داده است که در- نیومیکه در مقاله جذاب [۲] و خیلی قبل تر از آن، هیگوچی [۳] آن را مشاهده کردند: در نظریه فیرز- پائولی جرم دار با پس زمینه دوستیته، اگر جرم گراویتون و ثابت کیهان شناسی در D بعد از طریق رابطه $\Lambda = (\frac{D-1}{D-2})M^2$ به یکدیگر مرتبط شوند، منجر به تقارن پیمانه ای جدیدی می شوند و یک درجه از درجات آزادی میدان کم خواهد شد. این نظریه به عنوان نظریه بدون جرم جزئی شناخته شد. از آنجایی که در نظریه های بدون جرم جزئی ثابت کیهان شناسی به جرم گراویتون پیوند زده می شود، این مدل ها جذابیت زیادی برای حل مساله قدیمی ثابت کیهان شناسی فراهم کرده است [۴-۶]. در حقیقت کوچک بودن ثابت کیهان شناسی با معرفی جرم کوچک گراویتون تضمین می شود. مشاهده جالب رفتار ناگهانی سیستم در زمانی است که نظریه مرز هیگوچی را لمس می کند [۴] و ساختار قیدی سیستم شاخص متفاوتی پیدا می کند.

ساختار هامیلتونی کنش فیرز- پائولی در فضای تخت

حالت بدون جرم: کنش فیرز پائولی در فضای تخت عبارت است از:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (-1/2 \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\lambda\mu} - \partial_\mu h^{\nu\lambda} \partial^\nu h^{\mu\lambda} + 1/2 \partial_\lambda h^{\lambda\mu} \partial_\mu h^{\nu\lambda})$$

$h_{\mu\nu}$ تانسور مرتبه ۲ متقارن با ۱۰ مولفه می باشد.

$$\phi^{00} = \pi^{00} + \partial_k h_{0k}, \phi^{0i} = \pi^{0i} - \partial_i h_{00} - \partial_i h_{kk}$$

از سازگاری قیود اولیه برای حالت بدون جرم قیود سطح دوم داریم:

$$\bar{\chi}^{00} = \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij}, \bar{\chi}^{0i} = 2 \partial_j \pi^{ij} + \nabla^2 h_{0i}$$

هیچ قید سطح سومی برای نظریه فیرز- پائولی بدون جرم نمی ماند. بنابراین Λ قید نوع اول در دو سطح داریم. در نتیجه ۴ درجه آزادی در فضای فاز خواهیم داشت که معادل با ۲ درجه آزادی دینامیکی در فضای پیکر بندی می شود. قیود نوع اول مولدهای تبدیلات پیمانه ای هستند که کنش را ناوردانگه می دارند.

این تبدیل پیمانه ای از نظریه هیلبرت-اینشتین تحت خطی سازی حول فضای تخت به اثر برده شده است.

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} (-\frac{1}{2} M^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2))$$

حالت جرم دار: با اضافه کردن جمله جرمی فیرز پائولی

$$\chi^{00} = \bar{\chi}^{00} - M^2 h_{kk}, \chi^{0i} = \bar{\chi}^{0i} + 2M^2 h_{0i}$$

کرشه بواسن قیود سطح دوم با قیود اولیه غیر صفر می شوند. بنابراین مجموعه قیود ϕ^{0i} و χ^{0i} شش قید مرتبه دوم خواهند بود که ضرایب نامعین لاگرانژ را تعیین می کنند. اما قید χ^{00} منجر به قید سطح سوم می شود و از سازگاری آن قید سطح چهارم

$$\psi^{00} = -\partial_i \partial_j \pi^{ij} - \nabla^2 \partial_k h_{0k} - \frac{1}{2} M^2 \partial_k h_{0k} + \frac{1}{2} M^2 \pi^{kk}$$

$$\Lambda^{00} \approx \frac{1}{2} M^4 (3h_{00} - h_{kk})$$

در این مرحله یک زنجیره چهار سطحی از قیود نوع دوم ($\phi^{00}, \chi^{00}, \psi^{00}, \Lambda^{00}$) داریم و لذا ۵ درجه آزادی برای مدل فیرز-پائولی جرم دار خواهیم داشت.

ساختار هامیلتونی کنش فیرز- پائولی در فضای دوستیته

حالت بدون جرم: کنش فیرز پائولی در فضای خمیده

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} (-\frac{1}{2} \nabla_\lambda h_{\mu\nu} \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \nabla_\lambda h_{\mu\nu} \nabla^\nu h^{\lambda\mu} - \nabla_\mu h^{\nu\lambda} \nabla^\nu h^{\mu\lambda} + \frac{1}{2} \nabla_\lambda h^{\lambda\mu} \nabla_\mu h^{\nu\lambda} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu})$$

با متریک فضای دوستیته $ds^2 = -dt^2 + e^{2mt} d\vec{x}^2, m^2 = \frac{\Lambda}{3}$ قیود نوع اول عبارتند از:

$$\phi^{00} = \pi^{00} + e^{mt} \partial_k h_{0k} - e^{mt} m h_{kk} - 3e^{3mt} m h_{00}, \phi^{0i} = \pi^{0i} - e^{mt} \partial_i h_{kk} - e^{mt} \partial_i h_{00} + 4e^{mt} m h_{0i}$$

از سازگاری قیود اولیه به قیود سطح دوم می رسمیم:

$$\bar{\chi}^{00} = me^{2mt} \pi^{kk} - e^{mt} \partial_i \partial_j h_{ij} + 3e^{mt} m \partial_k h_{0k} + e^{mt} m^2 h_{kk} + e^{-mt} \nabla^2 h_{kk}$$

$$\bar{\chi}^{0i} = 2 \partial_j \pi^{ij} + 2e^{-mt} \partial_i h_{kk} - 2e^{mt} m \partial_i h_{00} - 4me^{-mt} \partial_j h_{ij} + 2e^{-mt} \nabla^2 h_{0i}$$

مشابه با فضای تخت، ۸ قید نوع اول و ۲ درجه آزادی دینامیکی داریم و تابع مولد، سازنده تبدیل پیمانه ای

$$\delta h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

میدان های بدون جرم جزئی

بعد از باز تعریف قیود شکل صریح قید آخر $\Lambda^{00} = 2m^2$ اشباع می شود زمانی که مرز هیگوچی یعنی $M^2 = 2m^2$ می شود. اگر این حالت رخ بدهد، شرط سازگاری در سطح سوم تعیین می شود و به سطح چهارم نمی رود، بنابراین تبدیل به زنجیره نوع اول از قیود در سه سطح به صورت ($\phi^{00}, \chi^{00}, \psi^{00}$) خواهیم شد. حال با این سه قید نوع اول و شش قید نوع دوم، ۴ درجه آزادی را نتیجه خواهد داد که معروف به نظریه بدون جرم جزئی است. با وجود زنجیره قیود نوع اول تابع مولد $G = \int d^3x (\phi^{00} (\partial_0^2 - \frac{1}{2} M^2) \alpha(x) - \chi^{00} \partial_0 \alpha(x) + \psi^{00} \alpha(x))$ را داریم و به تبدیل پیمانه ای بدون جرم جزئی خطی می رسمیم: $\delta h_{\mu\nu} = (\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2} M^2 g_{\mu\nu}) \alpha(x)$

مراجع

- [۱] M. Fierz and W. Pauli, "On relativistic wave equation for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field", *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **173** (1939) 211-232.
- [۲] S. Deser and R. I. Nepomechie, "Anomalous propagation of gauge fields in conformally flat spaces", *Phys. Lett. B* **132** (1983) 321.
- [۳] A. Higuchi, "Forbidden mass range for spin-2 field theory in de Sitter space time", *Nucl. Phys. B* **282** (1987) 397.
- [۴] S. F. Hassan, A. Schmidt-May and M. von Strauss, arXiv:1208.1797 [hep-th].
- [۵] S. Deser, M. Sandora, and A. Waldron, "Nonlinear Partially Massless from Massive Gravity", *Phys. Rev. D* **87** (2013) 101501.
- [۶] S. Deser and A. Waldron, "Gauge Invariances and Phases of Massive Higher Spins in (A)dS", *Phys. Rev. Lett.* **87**(2001) 031601, arXiv:0102166 [hep-th].

نتایج

هدف اصلی تحلیل هامیلتونی فراتر از شمارش تعداد درجات آزادی است. در واقع اصول رفتار جبر قیود به ما در فهم بهتر ساختارهای تقارن پیمانه ای کمک می کند. در راستای رفتار دینامیکی سیستم در نواحی مختلف فضای پارامتری، کلاس جالبی از مدل ها وجود دارد که رفتار دینامیکی متفاوتی برای مقدار خاصی از پارامترها به وجود می آورد که نظریه بدون جرم جزئی نامیده می شوند. این ها میدان های اسپین ۲ فیرز- پائولی جرم دار منتشر شده در یک فضای خمیده با خمش ثابت اند. در جبر قیود، زمانی که جرم گراویتون با ثابت کیهان شناسی پیوند می خورد، اتفاق جالبی رخ می دهد؛ زنجیره نوع دوم چهار عنصری به یک زنجیره نوع اول سه عنصری تغییر می کند و منجر به ظهور تقارن پیمانه ای جدیدی می شود. نکته دیگری که در این مقاله قابل توجه است باز تعریف مشخص یک قید با ترکیبی از قیود بدست آمده حاضر است. اگر چه این تکنیک ها در نگاه اول ساده به نظر می آیند، اما در عمل این نکات ظریف مانع از این می شود که افراد بتوانند از آنالیز هامیلتونی بهره بگیرند.